

---

## Mécanique analytique, Corrigé 10

---

*Assistants et tuteurs :*

jeanne.bourgeois@epfl.ch  
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch  
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch  
 filippo.ferrari@epfl.ch  
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch  
 mathias.findrihan@epfl.ch  
 remi.thomas@epfl.ch

### Exercice 1 : Deux oscillateurs anharmoniques couplés (?)

Nous travaillons en coordonnées canoniques  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$  avec le crochet de Poisson

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial B}{\partial p_1} - \frac{\partial A}{\partial p_1} \frac{\partial B}{\partial q_1} + \frac{\partial A}{\partial q_2} \frac{\partial B}{\partial p_2} - \frac{\partial A}{\partial p_2} \frac{\partial B}{\partial q_2}.$$

Le hamiltonien du système est

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{3}(q_1 - q_2)[(q_1 + q_2)^2 - q_1 q_2]. \quad (1)$$

Bien que la dernière expression semble coupler  $q_1$  et  $q_2$ , une simple manipulation algébrique montre qu'elle est en réalité séparable. En effet,

$$\begin{aligned} (q_1 - q_2)[(q_1 + q_2)^2 - q_1 q_2] &= (q_1 - q_2)(q_1^2 + 2q_1 q_2 + q_2^2 - q_1 q_2) \\ &= (q_1 - q_2)(q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2) \\ &= q_1(q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2) - q_2(q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2) \\ &= q_1^3 - q_2^3. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de (1), nous obtenons

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) + \frac{q_1^3}{3} - \frac{q_2^3}{3}, \quad (2)$$

ce qui est manifestement séparable.

### Première étape triviale

L'exercice suggère de commencer par calculer  $\{H, H\}$ . Comme le crochet de Poisson est antisymétrique, on a toujours

$$\{H, H\} = 0$$

pour tout hamiltonien  $H$ , donc cette étape est automatiquement satisfaite. La partie non triviale consiste à utiliser la structure de  $H$  pour trouver deux intégrales premières indépendantes en involution.

## Séparation du hamiltonien

Observons que le hamiltonien (2) se sépare comme somme de deux termes, chacun ne dépendant que d'une paire canonique  $(q_i, p_i)$  :

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = H_1(q_1, p_1) + H_2(q_2, p_2) \quad (3)$$

avec

$$H_1(q_1, p_1) = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{q_1^3}{3}, \quad (4)$$

$$H_2(q_2, p_2) = \frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) - \frac{q_2^3}{3}. \quad (5)$$

Le système est donc la somme directe de deux systèmes hamiltoniens à un degré de liberté.

## Deux intégrales du mouvement en involution

Nous montrons maintenant que  $H_1$  et  $H_2$  sont des intégrales du mouvement et qu'elles sont en involution.

**Conservation.** Comme  $H = H_1 + H_2$ , la dérivée temporelle de  $H_1$  le long du flot hamiltonien engendré par  $H$  est

$$\dot{H}_1 = \{H_1, H\} = \{H_1, H_1\} + \{H_1, H_2\} = \{H_1, H_2\},$$

car  $\{H_1, H_1\} = 0$ . De même,

$$\dot{H}_2 = \{H_2, H\} = \{H_2, H_1\}.$$

Or  $H_1$  dépend seulement de  $(q_1, p_1)$  et  $H_2$  seulement de  $(q_2, p_2)$ . Ainsi

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = \frac{\partial H_1}{\partial p_2} = \frac{\partial H_2}{\partial q_1} = \frac{\partial H_2}{\partial p_1} = 0,$$

ce qui donne immédiatement

$$\begin{aligned} \{H_1, H_2\} &= \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial p_1} - \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} - \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $\dot{H}_1 = \dot{H}_2 = 0$ , ainsi  $H_1$  et  $H_2$  sont des quantités conservées, et de plus

$$\{H_1, H_2\} = 0, \quad (6)$$

c'est-à-dire qu'elles sont en involution.

## Indépendance.

Pour vérifier l'indépendance fonctionnelle, nous calculons leurs gradients :

$$\nabla H_1 = \left( \frac{\partial H_1}{\partial q_1}, \frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \right) = (q_1 + q_1^2, 0, p_1, 0),$$

$$\nabla H_2 = (0, q_2 - q_2^2, 0, p_2).$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants en tout point où  $(p_1, q_1 + q_1^2)$  n'est pas proportionnel à  $(0, 0)$  et  $(p_2, q_2 - q_2^2)$  n'est pas proportionnel à  $(0, 0)$  simultanément. Ainsi, ils sont fonctionnellement indépendants sur un sous-ensemble ouvert et dense de l'espace des phases (tous les points sauf un sous-ensemble de dimension inférieure où les deux gradients s'annulent). C'est la condition standard pour l'intégrabilité au sens de Liouville.

## Intégrabilité de Liouville

Pour un système à deux degrés de liberté, l'intégrabilité de Liouville requiert l'existence de deux intégrales du mouvement indépendantes et en involution. La paire

$$F = H_1(q_1, p_1), \quad G = H_2(q_2, p_2)$$

satisfait

$$\{F, G\} = 0,$$

et est fonctionnellement indépendante. Le système hamiltonien défini par (2) est donc intégrable au sens de Liouville.

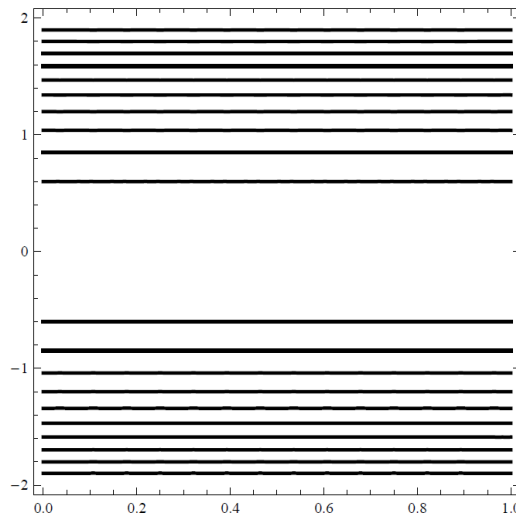
On peut également choisir  $H$  lui-même et, par exemple,

$$K = H_1 - H_2$$

comme intégrales du mouvement : elles sont indépendantes et, étant des combinaisons linéaires de  $H_1$  et  $H_2$ , elles sont aussi en involution. Dans tous les cas, l'existence de ces deux intégrales commutantes et indépendantes montre que le système est intégrable au sens de Liouville.

### Exercice 2 : Billard plan rectangulaire

- a) Entre deux collisions, les impulsions  $p_x$  et  $p_y$  sont conservées. Le portrait de phase est donc trivial ; selon chaque dimension on a :



- b) Le hamiltonien entre deux collisions est le hamiltonien pour une particule libre en deux dimensions :

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) \quad (7)$$

En effectuant la séparation  $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ , on obtient l'équation de Hamilton–Jacobi suivante :

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right] = \alpha_1 \quad (8)$$

Par séparation de variables cela conduit à :

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 = 2m\alpha_2 \Rightarrow f_1(x) = \pm\sqrt{2m\alpha_2}x$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 = 2m(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow f_2(y) = \pm\sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}y$$

Au final on a donc quatre solutions différentes :

$$f_{\pm\pm}(x, y) = \pm\sqrt{2m\alpha_2}x \pm \sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}y \quad (9)$$

Les signes correspondent au signe de  $p_x, p_y$ , c'est-à-dire au sens de déplacement de la particule : positif dans le sens croissant et négatif dans le sens décroissant.

- c) Pour trouver les variables action, il faut définir les orbites que l'on veut parcourir et comment elles sont définies dans notre cas. Un exemple d'orbite est donné par la figure 1. Pour revenir à son point de départ, la particule fait plusieurs rebonds sur les bords du billard. Commençons par le mouvement selon  $x$  : la bille touche le bord  $x = 0$  et va jusqu'au bord  $x = a$  (éventuellement avec plusieurs rebonds entre les deux). L'important est qu'après retour au point de départ, la particule a parcouru au moins toute la largeur de  $x = 0$  à  $x = a$  ainsi que le sens inverse de  $x = a$  à  $x = 0$ . Le tracé  $0 \rightarrow a$  est décrit par  $f_{++}$  (le mouvement selon  $y$  est indépendant) et celui du retour,  $a \rightarrow 0$ , par  $f_{-+}$ . Ce qui conduit à :

$$I_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^a [\sqrt{2m\alpha_2}] dx + \frac{1}{2\pi} \int_a^0 [-\sqrt{2m\alpha_2}] dx = \frac{\sqrt{2m\alpha_2}}{\pi} a \quad (10)$$

Pour le mouvement selon  $y$  on a le même comportement et donc :

$$I_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^b [\sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}] dy + \frac{1}{2\pi} \int_b^0 [-\sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}] dy = \frac{\sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\pi} b \quad (11)$$

À noter que les  $I_i$  sont donnés par les conditions initiales.

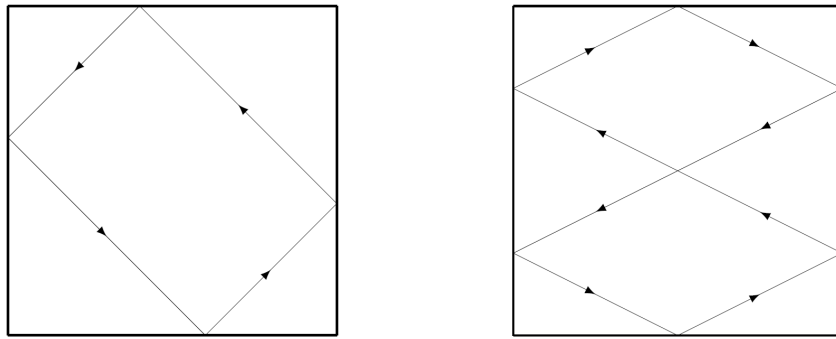


FIGURE 1 – Deux exemples de trajectoires périodiques pour un billard carré. A gauche,  $\omega_x = \omega_y$ . A droite,  $2\omega_y = \omega_x$ .

- d) De l'expression de  $I_y$  on peut trouver  $\alpha_1 = \alpha_1(I_y, \alpha_2)$ , puis de l'expression de  $I_x$  on trouve  $\alpha_2 = \alpha_2(I_x)$ . On obtient ainsi :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\pi I_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi I_y}{b}\right)^2 \right] \quad (12)$$

e) Les dérivées partielles du résultat ci-dessus nous donnent les fréquences du mouvement :

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{\pi^2}{mg^2} I_x \\ \omega_y = \frac{\pi^2}{mb^2} I_y \end{cases} \quad (13)$$

Le mouvement est globalement périodique si le rapport entre ces deux fréquences est rationnel.

Dans le cas du billard carré, on a  $a = b$ . Choisissons par exemple  $\omega_x/\omega_y = 1$ . Dans ce cas  $I_x = I_y$  et donc  $p_x = \pm p_y$  : il faut donc lancer la bille avec un angle  $\arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = \frac{\pi}{4}$  par rapport à l'horizontale.

Si on préfère  $\omega_x/\omega_y = 2$  alors  $I_x = 2I_y$  et donc  $p_x = \pm 2p_y$  : il faut lancer la bille avec un angle  $\arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = \arctan(1/2) \approx 0.39$  (figure 1 à droite). Dans ce cas, la bille fait deux allers-retours selon  $x$  avant de revenir à son point de départ.

### Exercice 3 : Variable action

Le potentiel est donné par :

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k_- \left(x + \frac{a}{2}\right)^2, & x < -\frac{a}{2}, \\ 0, & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ \frac{1}{2}k_+ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2, & x > \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

a) Potentiel et portrait de phase pour  $a = 2$ ,  $k_- = 0.1$ ,  $k_+ = 0.5$  :

b) L'équation de Hamilton–Jacobi est donnée par :

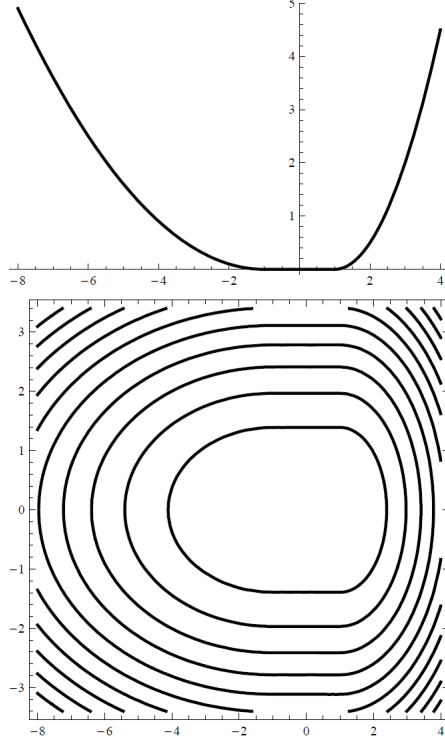
$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + V(x) = E \quad (15)$$

qui devient :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \begin{cases} \sqrt{2m \left[E - \frac{1}{2}k_- \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]}, & x < -\frac{a}{2}, \\ \sqrt{2mE}, & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ \sqrt{2m \left[E - \frac{1}{2}k_+ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]}, & x > \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (16)$$

Pour définir les orbites il faut trouver les points de rebroussement, donnés par  $H(p = 0, x_{\pm}) = E$  :

$$x_{\pm} = \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{2E}{k_{\pm}}}. \quad (17)$$



La variable action devient donc :

$$\begin{aligned}
 I(E) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{x_-}^{-a/2} \sqrt{2m \left[ E - \frac{1}{2}k_- \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]} dx + \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{2mE} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{a/2}^{x_+} \sqrt{2m \left[ E - \frac{1}{2}k_+ \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]} dx \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{2mE}}{\pi} \left[ \sqrt{\frac{2E}{k_-}} \int_{-1}^0 \sqrt{1-z^2} dz + a + \sqrt{\frac{2E}{k_+}} \int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz \right] \\
 &= \frac{\sqrt{mE}}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{k_-}} + \sqrt{\frac{2}{E}} \frac{2a}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{k_+}} \right].
 \end{aligned} \tag{18}$$

c) Pour  $a = 0$  l'expression pour  $I(E)$  se simplifie :

$$I(E) = \frac{\sqrt{m} E}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{k_-}} + \frac{1}{\sqrt{k_+}} \right] \tag{19}$$

On peut à présent l'inverser :

$$E(I) = \frac{2I}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{k_- k_+}}{\sqrt{k_-} + \sqrt{k_+}} \tag{20}$$

et donc trouver la fréquence du mouvement  $\omega = \frac{\partial E}{\partial I}$  :

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{k_- k_+}}{\sqrt{k_-} + \sqrt{k_+}} \tag{21}$$

qui est bien égale à la moyenne harmonique des fréquences “élémentaires” :

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k_{\pm}}{m}} \quad (22)$$

d) Si  $k_- = 0$  le potentiel est plat pour  $x < 0$ . La particule va donc juste s'échapper à vitesse constante et il n'y aura pas d'oscillations (des oscillations avec une période infinie et donc une fréquence nulle) et en effet :

$$\lim_{k_- \rightarrow 0} \omega = 0 \quad (23)$$

Dans le cas  $k_- \rightarrow \infty$  le potentiel devient un demi-oscillateur harmonique de constante  $k_+$  avec un mur au milieu. On s'attend donc à trouver  $\omega = 2\omega_+$  et en effet :

$$\lim_{k_- \rightarrow \infty} \omega = 2\omega_+ \quad (24)$$